P90R

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Partie I

Etude d'un pendule amorti

Nous considérons un pendule plongé dans un fluide visqueux (l'air par exemple). Si $\alpha(t)$ désigne l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale (orientée vers le bas), alors $\alpha(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 2 du type :

$$\alpha''(t) = -b\,\sin\big(\alpha(t)\big) - c\,\alpha'(t), \tag{1}$$

où b et c sont des constantes strictement positives.

1. Si l'on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \alpha'(t) \end{pmatrix}$, vérifier que Y est solution du système différentiel

$$Y'(t) = G\big(Y(t)\big)$$

où G est la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par

$$G(y) = G\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -b\,\sin y_1 - c\,y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre l'équation $G(y) = 0$.
3. Déterminer les solutions constantes de l'équation (1).
4. Calculer la matrice jacobienne de G en un point $y \in \mathbb{R}^2$.
5. Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) de cette matrice jacobienne aux points obtenus à la question 2.
6. Quel lien peut-on établir (dans ce cas) entre le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne et la nature des états d'équilibre du système ?

Partie II

Etude d'un système linéaire

Dans toute cette partie, on considère une matrice carrée A de taille d à coefficients complexes et le système différentiel linéaire

$$Y'(t) = AY(t) \tag{2}$$

où $Y(t)$ est un vecteur colonne de $\mathbb{C}^d$.

1. Soit λ un nombre complexe. Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle
$$y' = \lambda y.$$

2. Soit λ et μ deux nombres complexes et P un polynôme à coefficients complexes de degré n. On considère l'équation différentielle
$$y' = \lambda y + P(t)e^{\mu t} \tag{$*$}$$
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que la fonction définie pour tout t réel par
   $$y(t) = Q(t)e^{\mu t}$$
   soit solution de l'équation $(*)$.
   (b) Déterminer le degré de Q en fonction de $\lambda - \mu$.
   (c) En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(*)$ s'écrit sous la forme
   $$y(t) = Ce^{\lambda t} + Q(t)e^{\mu t}$$
   où C est un nombre complexe et Q est un polynôme à coefficients complexes de degré au plus égal à $n+1$.

3. Plus généralement, si $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k$ sont des nombres complexes et $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes à coefficients complexes, de degrés respectifs $n_1, \ldots, n_k$, montrer que toute solution de l'équation différentielle
$$y' = \lambda y + \sum_{i=1}^{k} P_i(t)e^{\mu_i t}$$
s'écrit sous la forme
$$y = Ce^{\lambda t} + \sum_{i=1}^{k} Q_i(t)e^{\mu_i t}$$
où C est un nombre complexe et les Q_i sont des polynômes à coefficients complexes de degrés respectifs au plus égaux à $n_i + 1$.

4. On suppose que la matrice A est triangulaire supérieure, n'admettant que λ comme valeur propre. Montrer que toute solution de l'équation (2) peut s'écrire
$$Y(t) = e^{\lambda t}(a_0 + ta_1 + \cdots + t^{d-1}a_{d-1})$$
où les a_i sont des vecteurs de $\mathbb{C}^d$.

5. Dans le cas général, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres (complexes, non nécessairement distinctes) de A.
   (a) On suppose que la matrice A est triangulaire supérieure. Montrer que toute solution complexe du système (2) peut s'écrire sous la forme
   $$Y(t) = \sum_{i=1}^{d} \left(e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{d-1} t^j a_j^{(i)} \right)$$
   où les $a_j^{(i)}$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^d$.

(b) Montrer que, si A est une matrice quelconque, les solutions sont encore de la forme précédente.

6. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.
   (a) Déterminer les vecteurs Z de $\mathbb{R}^d$ tels que $AZ = 0$.
   (b) Calculer $\lim_{t\to+\infty} Y(t)$ où Y est une solution de (2).

Partie III

Etude d'une équation différentielle non-linéaire : cas unidimensionnel

Dans toute cette partie, on considère une fonction g de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = -\lambda < 0$. On étudie l'équation différentielle

$$y'(t) = g\big(y(t)\big). \tag{3}$$

On suppose que la fonction g est telle que, pour tous réels t_1 et y_1 fixés, il existe une unique fonction y solution de l'équation (3) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant de plus $y(t_1) = y_1$.

Dans toute la suite, on fixe un réel y_0 et y désigne l'unique solution de (3) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = y_0$.

1. Que peut-on dire de la solution y lorsque $y_0 = 0$?
2. Montrer que si $y_0 \neq 0$, alors la fonction y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. On définit la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{g(x)}{x} + \lambda & \text{pour tout } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'il existe un $r_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| < r_0 \Longrightarrow \big|h(x)\big| < \frac{\lambda}{2}.$$

5. On suppose dans cette question que $0 < y_0 < r_0/2$.
   (a) Montrer qu'il existe un $T > 0$ tel que, pour tout $s \in [0, T]$,

$$0 < y(s) < r_0.$$

   (b) En déduire que, pour tout s dans $[0, T]$, on a

$$\frac{y'(s)}{y(s)} < -\frac{\lambda}{2}.$$

   (c) Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$0 < y(t) < e^{-\frac{\lambda}{2}t} y_0.$$

   (d) En déduire que cette inégalité est encore vraie pour $t \in [T, 2T]$.
6. Montrer finalement que l'on a

$$|y_0| < \frac{r_0}{2} \Longrightarrow \forall t \geq 0, \quad \big|y(t)\big| \leq e^{-\frac{\lambda}{2}t} |y_0|.$$

7. Que vaut $\lim_{t\to+\infty} y(t)$?

Partie IV

Etude d'une équation différentielle non-linéaire : cas multi-dimensionnel

Dans toute cette partie, on considère une application G de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $G(0) = 0$. On note A la matrice jacobienne de G en 0. On suppose que la matrice A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et que ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ (non nécessairement distinctes) sont toutes strictement négatives.

On étudie le système différentiel non-linéaire

$$Y'(t) = G\big(Y(t)\big). \tag{4}$$

On suppose que G est telle que, pour tout vecteur Y_0 de $\mathbb{R}^d$, il existe une unique fonction $Y(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ solution de (4) et vérifiant $Y(0) = Y_0$. Dans toute la suite, Y désigne cette fonction.

1. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ et $<\ ,\ >$ le produit scalaire usuel.
   On pose $E(t) = \|Y(t)\|^2$.
   Montrer que E est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction de Y.
2. On définit l'application H de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ par

$$\forall Z \in \mathbb{R}^d, \qquad \begin{cases} H(Z) = \dfrac{1}{\|Z\|}\big(G(Z) - AZ\big) & \text{si } Z \neq 0 \\ H(0) = 0 \end{cases}$$

   et on admet que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^d$.
   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$E'(t) \leq 2\big\langle AY(t), Y(t)\big\rangle + 2\,\|Y(t)\|^2 \left\|H\big(Y(t)\big)\right\|.$$

3. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
4. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $\mathcal{B}_\alpha = (e_1, \alpha e_2, \ldots, \alpha^{d-1} e_d)$. Vérifier que $\mathcal{B}_\alpha$ est une base de $\mathbb{R}^d$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients hors de la diagonale de valeur absolue strictement plus petite que ε.
6. Soit P une matrice inversible. On pose $Y_*(t) = PY(t)$ et $H_*(Y_*) = H(Y)$.
   (a) Montrer que Y_* est solution de $Y_*' = PG(P^{-1}Y_*)$.
   (b) En reprenant le raisonnement précédent appliqué à Y_*, montrer que l'on peut choisir la matrice P telle que

$$\frac{d}{dt}\|Y_*(t)\|^2 \leq \|Y_*(t)\|^2 \left(-\lambda + 2\left\|H_*\big(Y_*(t)\big)\right\|\right)$$

   où

$$\lambda = \min_{1 \leq i \leq d} |\lambda_i|.$$

7. En utilisant les résultats de la partie III, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, si $\|Y_0\| < r$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0.$$

Remarque : le raisonnement précédent peut se généraliser au cas d'une matrice A quelconque que l'on trigonalise dans $\mathbb{C}$. Une condition suffisante pour que 0 soit un point d'équilibre stable est alors que toutes les valeurs propres de A soient de partie réelle strictement négative.